CLASE 7. Campos Conservativos

Definición 7.1 (Campo Conservativo)**.** Un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice conservativo en $\mathcal{D}$ si para cualquier curva cerrada simple (orientada) en $\mathcal{D}$ se cumple $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$.

Definición 7.2 (Integral de línea independiente de la trayectoria)**.** Se dice que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ es independiente de la trayectoria (o que depende sólo de los puntos extremos de la curva) si para cualesquiera curvas C_1 y C_2 en $\mathcal{D}$ con idénticos puntos extremos se cumple que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Es claro que las dos definiciones anteriores son equivalentes: Si suponemos que se cumple la Definición 7.2 (para probar que también cumple la Definición 7.1), entonces para cualquier curva C cerrada (simple y orientada), se tiene que C y $-C$ tienen los mismos extremos. Luego,

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

de donde se obtiene que $2\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ y, por tanto,

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

cumpliéndose entonces la Definición 7.1.

Suponiendo ahora que se cumple la Definición 7.1, elegimos dos curvas arbitrarias (simples) C_1 y C_2 con los mismos puntos extremos. Luego $C_1 - C_2$[1] es cerrada, ver Figura 1.

Debido a la Definición 7.1 es

$$\int_{C_1 - C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{es decir,} \quad \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$$

[1] Esto denota la curva formada por C_1 y por C_2, sólo que ésta última es recorrida en sentido contrario.

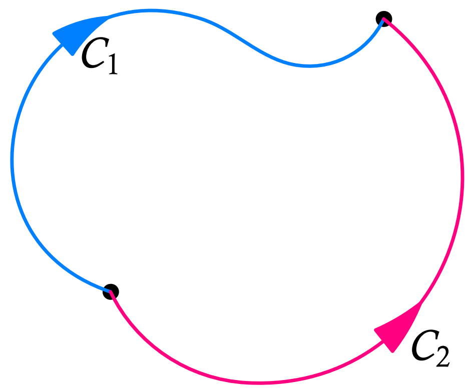

Figura 1: Independencia de trayectoria y campos conservativos.

y así,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

cumpliéndose entonces la Definición 7.2.

Definición 7.3 (Diferencial Exacta)**.** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ entonces en la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ aparece la expresión $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. Diremos que esta expresión es una diferencial exacta si existe un campo escalar $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de manera que su diferencial total $\mathrm{d}f$ coincida con la expresión $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, es decir, si $\mathrm{d}f = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, lo que equivale a pedir que $f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ y que

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & = P \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} & = Q \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} & = R. \end{cases}$$

Esto es equivalente a $\mathbf{F} = \nabla f$. Se dirá en este caso que f es un potencial de $\mathbf{F}$. Usando el Teorema 4.3, si $\mathbf{F} = \nabla f$ entonces $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \mathrm{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = 0$. Por otra parte, si $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ y C es una curva cerrada simple orientada en $\mathcal{D}$, entonces tomando una superficie S cuya frontera sea C y aplicando el teorema de Stokes (siendo $\mathbf{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$) se tiene que $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$. Luego,

Teorema 7.4. *Si existe un potencial f del campo vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entonces $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ y el campo es conservativo.*

La forma general del teorema de campos conservativos sería enunciado así:

Teorema 7.5. *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^1$ *definido en* $\mathbb{R}^3$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{F}$ *es conservativo.*

(ii) La integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ *es independiente de la trayectoria.*

(iii) Existe una función potencial f *para* $\mathbf{F}$*, es decir,* $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$*.*

(iv) La expresión $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ *es una diferencial exacta, siendo* $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z)\,,\ Q(x,y,z)\,,\ R(x,y,z))$*.*

(v) $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$*.*

Prueba. Sólo resta ver que (ii) $\Rightarrow$ (iii), lo cual se hace considerando la función

$$f(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t,$$

que se obtiene escogiendo una trayectoria C que une al origen con el punto $A(x,y,z)$ por medio de líneas poligonales paralelas a los ejes coordenados, tomando la última de éstas paralela al eje z (ver Figura 2). En este caso $\frac{\partial f}{\partial z} = R$. De manera similar, cambiando las trayectorias paralelas a los ejes coordenados, tomando el último paralelo al eje x (observe que la función que obtendríamos, al integrar, sería la misma f puesto que, por hipótesis, la integral es independiente de la trayectoria) se tendría que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. Si el último es paralelo al eje y, aparece que $\frac{\partial f}{\partial z} = Q$. $\square$

Ejemplo 7.6. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2 + z)$.

(a) Decida si es conservativo.

(b) En caso afirmativo obtenga un potencial f.

(c) Calcule la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, donde C es una curva que une el punto $(1,-2,1)$ (punto inicial) con el punto $(3,1,4)$ (punto final).

Solución.

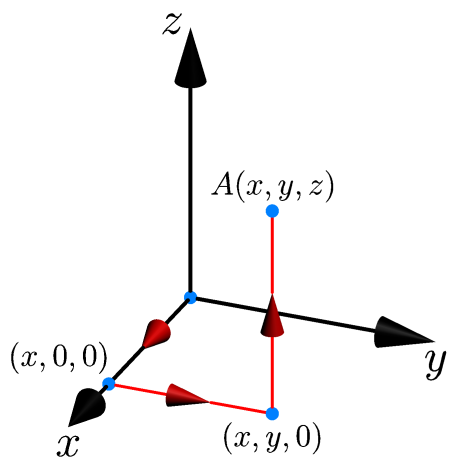

Figura 2: Tomando trayectorias paralelas a los ejes coordenados para construir el potencial.

(a) El campo $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, calculemos su rotor:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 + z \end{vmatrix} = 0.$$

Luego, por el Teorema 7.5, $\mathbf{F}$ es conservativo.

(b) Para calcular un potencial f, es decir, un campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, resolvemos el sistema: $f_x = P$, $f_y = Q$ y $f_z = R$. Es decir,

$$f_x = 2xy + z^3 \tag{1}$$
$$f_y = x^2 \tag{2}$$
$$f_z = 3xz^2 + z. \tag{3}$$

Integrando la primera ecuación (es decir, (1)) con respecto a x será

$$f(x,y,z) = \int (2xy + z^3)\,\mathrm{d}x + \varphi(y,z) = {}^{2}x^2y + z^3x + \varphi(y,z); \tag{4}$$

derivando ésta última ecuación respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overset{Ec.(2)}{\overset{\downarrow}{=}} x^2,$$

[2]Ésta función φ es la "constante" de integración (respecto a la variable de integración, es decir, respecto a x) que aparece en la integral indefinida.

de donde concluimos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$. Integrando ésta última ecuación (respecto a y), obtenemos $\varphi(y,z) = \displaystyle\int \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \psi(z) = $ [3] $\psi(z)$. Luego (sustituyendo lo anterior en (4)), $f(x,y,z) = x^2y + z^3x + \psi(z)$ y al derivar, respecto a z, obtenemos

$$f_z = 3z^2x + \psi'(z) \overset{\overset{Ec.(3)}{\downarrow}}{=} 3xz^2 + z.$$

Así $\psi'(z) = z$ y, en consecuencia, $\psi(z) = \dfrac{z^2}{2} + k$ (siendo k constante arbitraria). Finalmente, sustituyendo obtenemos

$$f(x,y,z) = x^2y + z^3x + \frac{z^2}{2} + k.$$

(c) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_C \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = f(p_1) - f(p_0) = f(3,1,4) - f(1,-2,1) = \frac{419}{2}.$

***Observación* 7.7.** Se puede obtener f muy fácilmente, calculando, por separado, $\int P\,\mathrm{d}x$, $\int Q\,\mathrm{d}y$ y $\int R\,\mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned}
\int P\,\mathrm{d}x &= \int 2xy + z^3\,\mathrm{d}x = x^2y + z^3x + k_1(y,z)\\
\int Q\,\mathrm{d}y &= \int x^2\,\mathrm{d}y = x^2y + k_2(x,z)\\
\int R\,\mathrm{d}z &= \int 3xz^2 + z\,\mathrm{d}z = xz^3 + z^2/2 + k_3(x,y).
\end{aligned}$$

Se toman los términos aislados y los comunes sin repetirlos (deben tener los mismos coeficientes), así

$$f(x,y,z) = x^2y + z^3x + \frac{z^2}{2} + k.$$

La justificación para este proceder sería la siguiente: Primero que nada, partiendo de la existencia de la función potencial f, el teorema fundamental del cálculo nos garantiza que cada una de las integrales indefinidas $\int P\,\mathrm{d}x$, $\int Q\,\mathrm{d}y$ y $\int R\,\mathrm{d}z$ da como resultado a f, salvo las "*constantes de integración*". Luego, aquellos términos (si es que los hay) que se repiten en las tres integrales anteriores, forman parte de la función potencial (puesto que las integrales indefinidas dan el mismo resultado, f, salvo "constantes"), razón por la cual, los incorporamos al potencial, pero

[3] Esta función $\psi(z)$ es la *constante de integración* que aparece en la integración (indefinida) anterior. Como se integró respecto a la variable y entonces ψ no puede depender de y. Note que tampoco puede depender de x puesto que φ sólo depende de las variables y y z.

sin repetirlos (una vez que se ha incluido un término, no hay necesidad de "volver" a incluir el mismo término, ¿no?). Ahora, los términos no comunes, por ejemplo, aquellos términos que aparecen en la expresión de $\int P\,\mathrm{d}x$ pero que no aparecen en alguna de las otras dos integrales, digamos en $\int R\,\mathrm{d}z$, también deben ser incluidos en el potencial puesto que, como dijimos antes, cada una de las integrales (impropias), en particular la primera, dan como resultado f, salvo "*constante*". Como cada una de las integrales dan el mismo resultado (la función f), entonces estos factores también deben aparecer en las expresiones correspondientes a las otras dos integrales indefinidas. Pero esto es posible solamente si, en el ejemplo del término que aparece en $\int P\,\mathrm{d}x$ pero que no aparece en $\int R\,\mathrm{d}z$, dicho término "faltante" depende únicamente de las variables x y y, de modo que, en realidad, forme parte de la "constante" de integración que llamamos $k_3(x,y)$. Y así con los otros términos no repetidos.

Ahora, en el caso de un campo que no sea conservativo, el procedimiento anterior falla (recuerde que, por el Teorema de Campos Conservativos (Teorema 7.5), si el campo $\mathbf{F}$ no es conservativo entonces no existe función potencial f para $\mathbf{F}$), por alguna de las dos siguientes razones:

- O bien porque los términos comunes aparecen con coeficientes diferentes (lo que, en realidad, los hace no-comunes).

- O porque alguno de los términos *faltantes* no depende de las variables adecuadas (los términos *faltantes* en la integral respecto a x sólo deben depender de y y de z; los que *faltan* en la integral respecto a y sólo deben depender de x y de z y los de la integral respecto a z, deben depender sólo de x y de y). Así, por ejemplo, si al integrar (a P) respecto a la variable x, aparece un término que no se repite en ninguna de las otras dos integrales y dicho término depende de y (o de z) entonces el potencial f no existe (puesto que al no estar presente en la integral $\int Q\,\mathrm{d}y$, ni en $\int R\,\mathrm{d}z$, no puede depender de la variable y, ni de z).

En definitiva, es muy fácil saber si, independientemente del procedimiento utilizado, obtuvo efectivamente una función potencial: ¡sólo debe calcularle el gradiente y verificar si coincide (o no) con $\mathbf{F}$!

Ejemplo 7.8. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^2 + 2xyz + h(z)\ ,\ 2xy + x^2z + 2yz^2\ ,\ x^2y + 2y^2z + x\cos(z)\right).$$

(a) Obtener la función real derivable $h(z)$ para que el campo dado sea conservativo.

(b) Usando esta función, halle un potencial f.

Solución.

(a) Como $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, sólo debemos resolver el sistema $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0$. Se obtiene

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, h'(z) - \cos(z), 0) = (0,0,0).$$

De $h'(z) = \cos(z)$ es $h(z) = \operatorname{sen}(z) + c$. Tomando $c = 0$ es $h(z) = \operatorname{sen}(z)$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 + 2xyz + \sin(z)\,,\, 2xy + x^2z + 2yz^2\,,\, x^2y + 2y^2z + x\cos(z))$. Resolviendo $\mathbf{F} = \nabla f$ (integrando) será

$$\begin{aligned}
\int P\,\mathrm{d}x &= \int y^2 + 2xyz + \operatorname{sen}(z)\,\mathrm{d}x = y^2x + x^2yz + x\operatorname{sen}(z) + k_1(y,z)\\
\int Q\,\mathrm{d}y &= \int 2xy + x^2z + 2yz^2\,\mathrm{d}y = xy^2 + x^2yz + y^2z^2 + k_2(x,z)\\
\int R\,\mathrm{d}z &= \int x^2y + 2y^2z + x\cos(z)\,\mathrm{d}z = x^2yz + y^2z^2 + x\operatorname{sen}(z) + k_3(x,y).
\end{aligned}$$

Luego $f(x,y,z) = y^2x + x^2yz + x\operatorname{sen}(z) + y^2z^2 + k$.